

1. $y = \frac{x^2 + 11}{x + 5}$

a) **ESTUDIO DE f :**

- 1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

Por tanto:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

- 2) **Simetría:** A simple vista, como el denominador no es simétrico, podemos decir que no va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 11}{-x + 5} = \frac{x^2 + 11}{-x + 5}$$

Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

- 3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

- 4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

- 5) **Corte con los ejes:**

Eje X \rightarrow Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^2 + 11}{x + 5} = 0 \Rightarrow x^2 + 11 = 0 \Rightarrow \text{No hay solución}$$

Luego no corta al Eje X.

Eje Y \rightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = \frac{0 + 11}{0 + 5} = \frac{11}{5}$$

Luego corta al Eje Y en el punto $\left(0, \frac{11}{5}\right)$

- 6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raíces del numerador y del denominador:

- Raíces del numerador \rightarrow No tiene.
- Raíces del denominador $\rightarrow x = -5$

El resultado de las regiones podemos observarlo en el cuadro 1.

- 7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

Buscamos entre las raíces del denominador. Vamos a ver si es asíntota la recta $x = -5$.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$\frac{x^2 + 11}{x + 5}$	-	+

Cuadro 1: Estudio del signo de f

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 11}{x + 5} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2 + 11}{x + 5} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 + 11}{x + 5} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = -5$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

Veamos que no tiene.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 11}{x + 5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 11}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 11}{-x + 5} = -\infty$$

Por tanto, no tiene.

- A. Oblicuas:

Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 11}{x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 11}{x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 11}{x + 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 11 - x \cdot (x + 5)}{x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11 - 5x}{x + 5} = -5$$

Por tanto la recta $y = x - 5$ es una asíntota oblicua.

b) ESTUDIO DE f' :

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 5) - (x^2 + 11)}{(x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x - x^2 - 11}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 11}{(x + 5)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raíces del numerador:

$$x^2 + 10x - 11 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -11$$

	$(-\infty, -11)$	$(-11, -5)$	$(-5, 1)$	$(-1, +\infty)$
$\frac{x^2 + 10x - 11}{(x + 5)^2}$	+	-	-	+

Cuadro 2: Estudio del signo de la derivada de f

- Raíces del denominador:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 2 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-11, 5) \cup (-5, 1)$.

2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 2 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en $x=-11$, luego, como el punto pertenece al dominio, tiene ahí un máximo.

En $x=1$ pasa de decrecer a crecer y también es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo.

La segunda coordenada de cada punto se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

$$x=-11 \longrightarrow y = \frac{(-11)^2 + 11}{-11 + 5} = \frac{121 + 11}{-6} = \frac{132}{-6} = -22$$

$$x=1 \longrightarrow y = \frac{1^2 + 11}{1 + 5} = \frac{12}{6} = 2$$

c) ESTUDIO DE f'' :

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x + 10) \cdot (x + 5)^2 - (x^2 + 10x - 11) \cdot (x + 5) \cdot 2}{(x + 5)^4} = \\ &= \frac{2x^2 + 10x + 10x + 50 - (2x^2 + 20x - 22)}{(x + 5)^3} = \frac{2x^2 + 20x + 50 - 2x^2 - 20x + 22}{(x + 5)^3} = \\ &= \frac{72}{(x + 5)^3} \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raíces del numerador: No tiene

- Raíces del denominador:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$\frac{72}{(x+5)^3}$	-	+

Cuadro 3: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-5, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -5)$.

No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-5\}$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X \rightarrow No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, \frac{11}{5})$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow (-5, +\infty)$

$-$ $\rightarrow (-\infty, -5)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -5$

A.H.: No tiene.

A.O.: $y = x - 5$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-11, -5) \cup (-5, 1)$

Máximos y mínimos: Son:

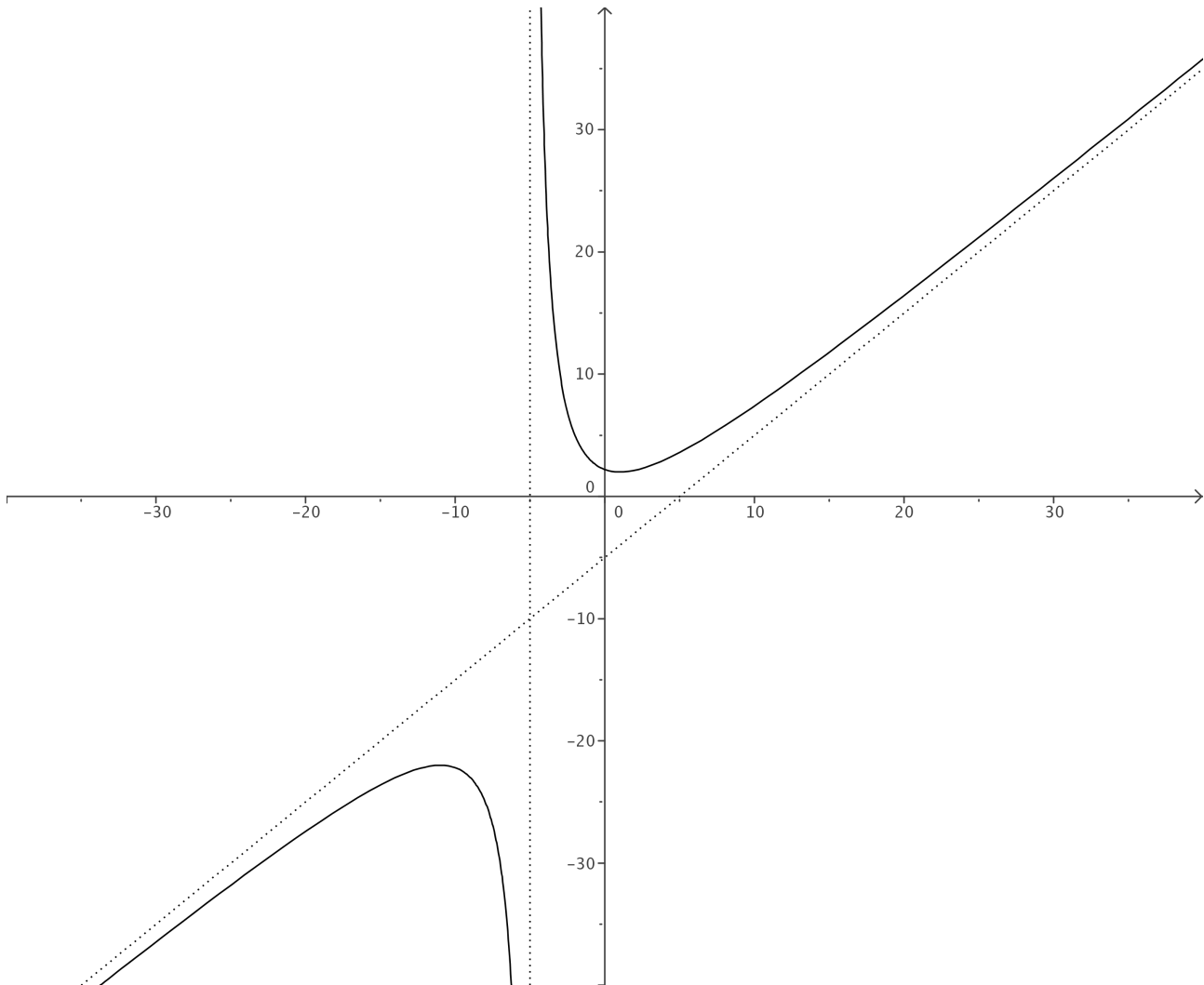
Máximo $\rightarrow (-11, -22)$

Mínimo $\rightarrow (1, 2)$

Cóncava $\rightarrow (-5, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -5)$

P. Inflexión: No tiene.



$$2. y = \frac{x^2}{9 - x^2}$$

a) **ESTUDIO DE f :**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

Por tanto:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{9 - (-x)^2} = \frac{x^2}{9 - x^2} = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**

Eje X \rightarrow Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^2}{9 - x^2} = 0 \implies x^2 = 0 \implies x = 0$$

Luego corta al Eje X en el punto $(0, 0)$.

Eje Y \rightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = \frac{0}{9} = 0$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raíces del numerador y del denominador:

- Raíces del numerador $\rightarrow x = 0$
- Raíces del denominador $\rightarrow x = \pm 3$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$\frac{x^2}{9 - x^2}$	-	+	+	-

Cuadro 4: Estudio del signo de f

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

Buscamos entre las raíces del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x = -3$ y $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2}{9 - x^2} = \left[\frac{9}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{9 - x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{9 - x^2} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{9 - x^2} = \left[\frac{9}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{9 - x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{9 - x^2} = -\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

Veamos que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1$$

En consecuencia, la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:

Como tiene asíntota horizontal no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f' :**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raíces del numerador:

$$18x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Raíces del denominador:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$\frac{18x}{(9-x^2)^2}$	-	-	+	+

Cuadro 5: Estudio del signo de la derivada de f

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

- 1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 5 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, 3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.
- 2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 5 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

$$x=0 \rightarrow y = 0$$

c) **ESTUDIO DE f'' :**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{18 \cdot (9 - x^2)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot (9 - x^2) \cdot 18x}{(9 - x^2)^4} = \\ &= \frac{162 - 18x^2 + 72x}{(9 - x^2)^3} = \frac{54x^2 + 162}{(9 - x^2)^3} \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raíces del numerador: No tiene
- Raíces del denominador:

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$\frac{54x^2 + 162}{(9 - x^2)^3}$	-	+	-

Cuadro 6: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-3, 3)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Simetría: Par. simétrica respecto Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (0, 0)$

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow (-3, 0) \cup (0, 3)$

$-$ $\rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -3 ; x = 3$

A.H.: $y = -1$.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

Decrecimiento $\rightarrow (0, 3) \cup (3, +\infty)$

Máximos y mínimos: Son:

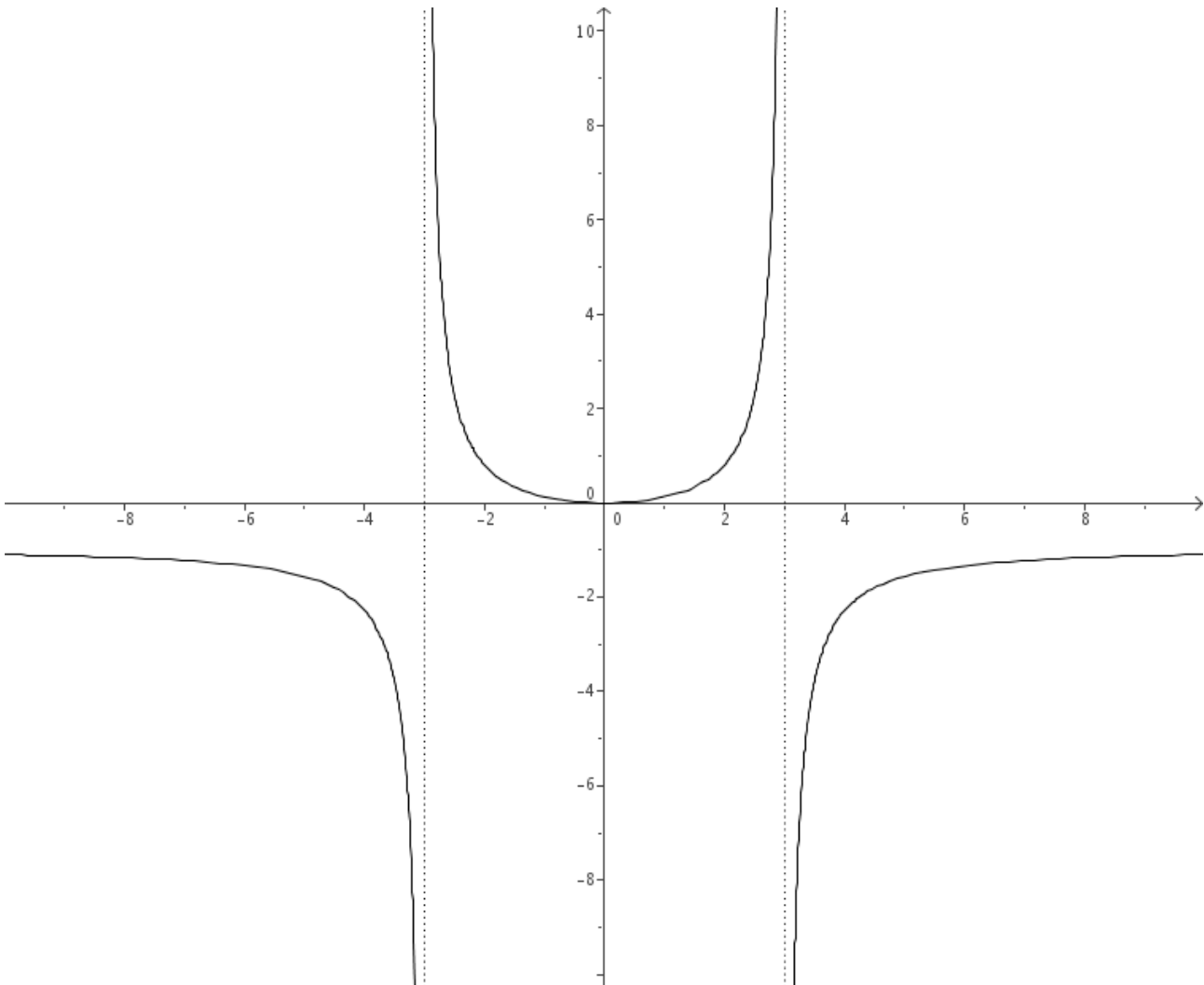
Máximo No tiene.

Mínimo $\rightarrow (0, 0)$

Cóncava $\rightarrow (-3, 3)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



$$3. y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

a) **ESTUDIO DE f :**

- 1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

Por tanto:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

- 2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

Luego la función es impar o simétrica respecto del origen.

- 3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.
- 4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.
- 5) **Corte con los ejes:**

Eje X \longrightarrow Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \implies x^3 = 0 \implies x = 0$$

Luego corta al Eje X en el punto $(0, 0)$.

Eje Y \longrightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

- 6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raíces del numerador y del denominador:
- Raíces del numerador $\longrightarrow x = 0$
 - Raíces del denominador $\longrightarrow x = \pm 1$

Por tanto el cuadro 7 queda como sigue:

- 7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

Buscamos entre las raíces del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{x^3}{x^2 - 1}$	-	+	-	+

Cuadro 7: Estudio del signo de f

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

Luego no tiene.

- A. Oblicuas:

Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\frac{x^3}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x \cdot (x^2 - 1)}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Por tanto la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

b) ESTUDIO DE f' :

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raíces del numerador:
 $x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = \pm\sqrt{3}$
- Raíces del denominador:
 $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$	+	-	-	-	-	+

Cuadro 8: Estudio del signo de la derivada de f

- 1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 8 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.
- 2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = \sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en $x = -\sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un máximo.

La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

$$x = -\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow y = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) **ESTUDIO DE f'' :**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2 - 1)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^4 - 3x^2)}{(9 - x^2)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raíces del numerador:
 $2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Raíces del denominador:
 $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$	-	+	-	+

Cuadro 9: Estudio del signo de la derivada segunda de f

Observando en el cuadro 9 la función es cóncava en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Hay un sólo punto de inflexión, el $(0, 0)$, pues aunque en $x=-1$ y en $x=1$ cambia la concavidad, no hay punto de inflexión por no pertenecer al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Simetría: Impar.

Simétrica respecto del Origen.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (0, 0)$

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$-$ $\rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -1$; $x = 1$

A.H.: No tiene.

A.O.: $y = x$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Máximos y mínimos: Son:

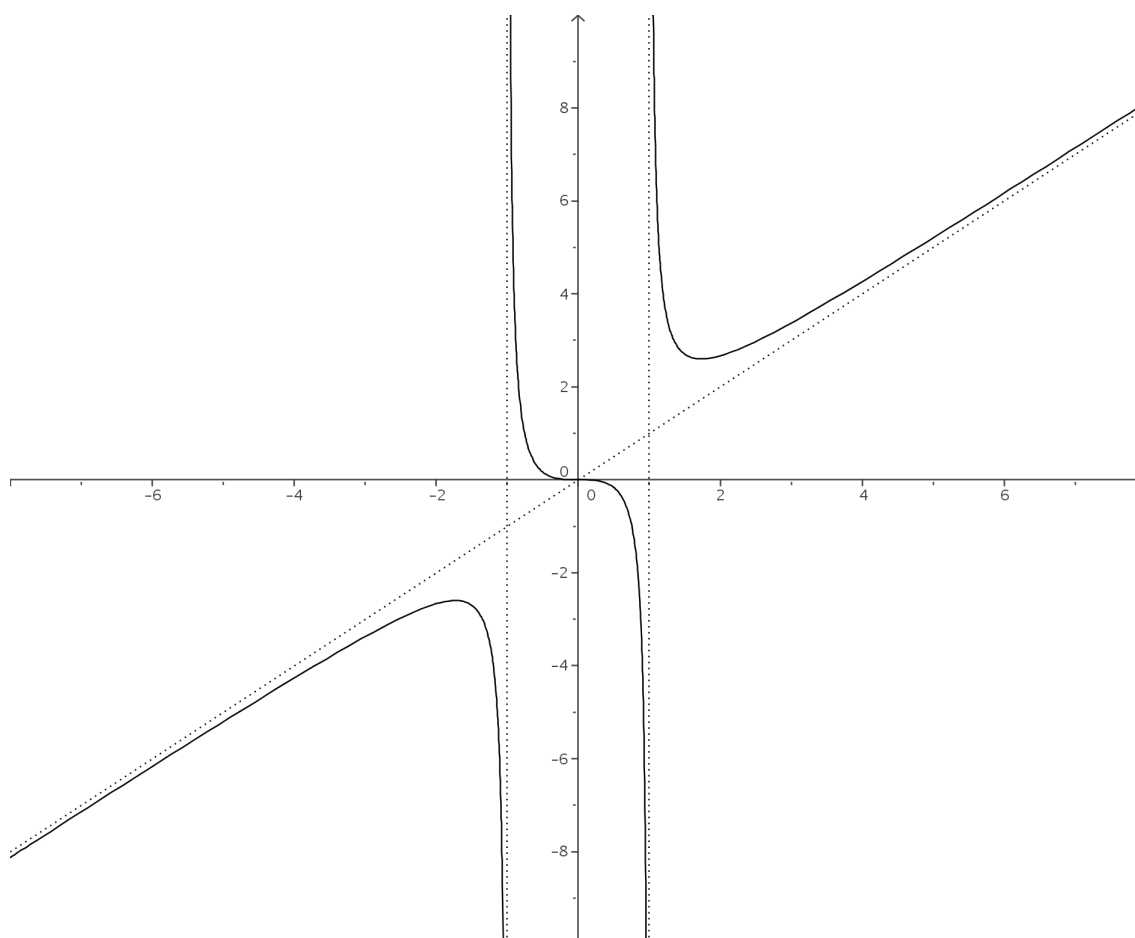
Máximo $\rightarrow (-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Mínimo $\rightarrow (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

Cóncava $\rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

P. Inflexión: $\rightarrow (0, 0)$.



4. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) **ESTUDIO DE f :**

1) **Dominio:** Como se trata de una raíz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero. Como el radicando es siempre mayor o igual que 1 ($x^2 + 1 \geq 1$), el dominio es todo \mathbb{R} .

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$$

Luego la función es par o simétrica respecto del Eje Y.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas. Por tanto es continua en todo \mathbb{R} .

5) **Corte con los ejes:**

Eje X \longrightarrow Hacemos $y = 0$.

$$\sqrt{x^2 + 1} = 0 \implies x^2 + 1 = 0 \implies$$

Luego no corta al Eje X.

Eje Y \longrightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 1)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raíz positiva, luego la función es positiva en todo \mathbb{R} .

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

■ A. Verticales:

En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.

■ A. Horizontales:

Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

Luego no tiene.

■ A. Oblicuas:

Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = 0$$

Por tanto, cuando $x \rightarrow +\infty$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \rightarrow -\infty$ tenemos:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - (-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$$

Por tanto, cuando $x \rightarrow -\infty$, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua.

b) ESTUDIO DE f' :

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

■ Raíces del numerador:

$$x = 0$$

■ Raíces del denominador:

$$\sqrt{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \text{No tiene.}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	-	+

Cuadro 10: Estudio del signo de la derivada de f

- 1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 10 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.

- 2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 10 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

$$x=0 \rightarrow y = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \implies (0, 1)$$

- c) **ESTUDIO DE f'' :**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión. Como $x^2 + 1 > 0 \implies f''(x) > 0$ deducimos que la función es cóncava. Como no cambia de tipo de concavidad podemos deducir que la función no tiene puntos de inflexión.

- d) Para afinar la representación gráfica vamos a hacer una pequeña tabla de valores:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4'12	3'16	2'24	1'41	1	1'41	2'24	3'16	4'12

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R}$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, 1)$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow \mathbb{R}$

$-$ \rightarrow No tiene.

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: No tiene.

A.O.: $\begin{cases} y = x & \text{cuando } x \rightarrow +\infty \\ y = -x & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

Crecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, 0)$

Máximos y mínimos: Son:

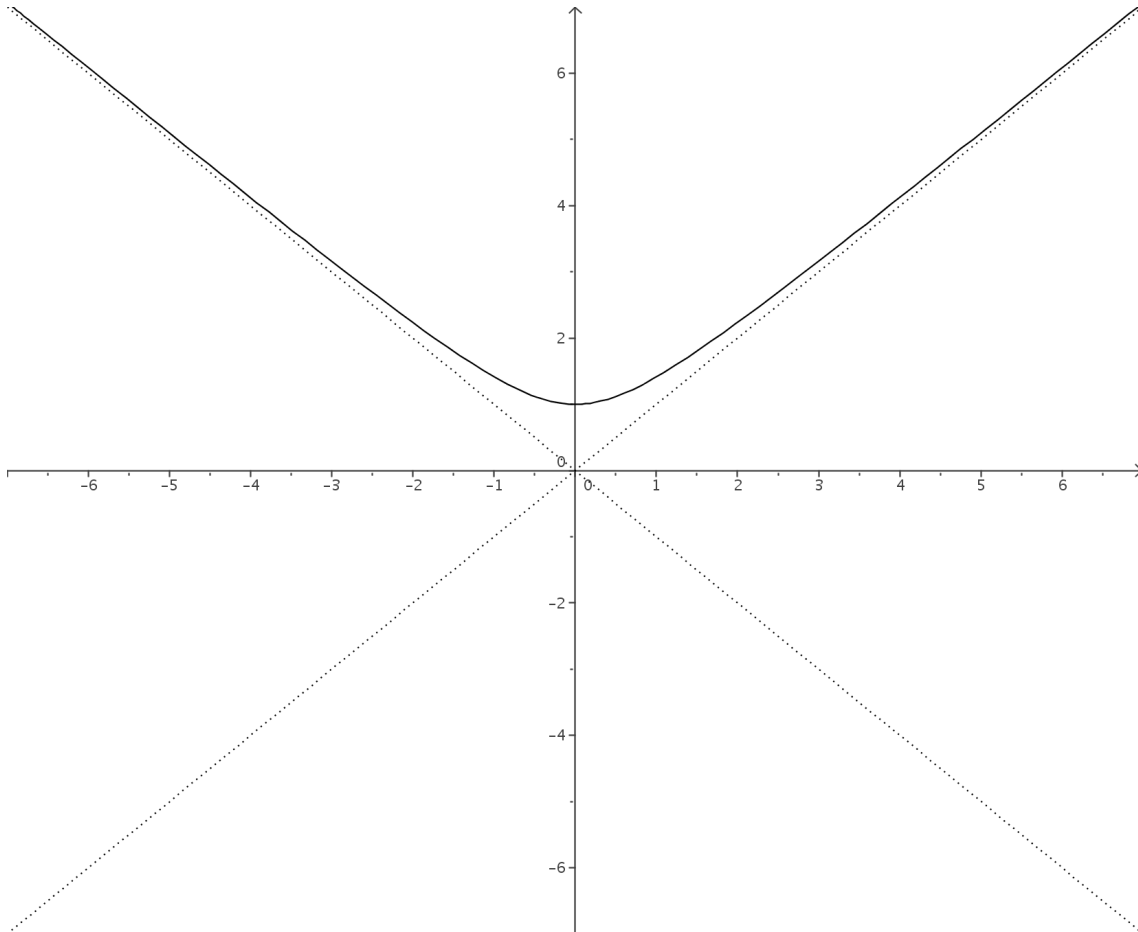
Máximo No tiene.

Mínimo $\rightarrow (0, 1)$

Cóncava $\rightarrow \mathbb{R}$

Convexa No es

P. Inflexión: No tiene.



5. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

a) **ESTUDIO DE f :**

- 1) **Dominio:** Como se trata de una raíz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero.

Veamos donde $x^2 + 2x \geq 0$.

Las raíces son:

$$x^2 + 2x = 0 \implies x = 0 ; x = -2$$

En virtud a lo que observamos en el cuadro 11, y teniendo en cuenta que el radicando

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$x^2 + 2x$	+	-	+

Cuadro 11: Signo del radicando

tiene que ser mayor o igual que cero, el dominio es $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- 2) **Simetría:** No va a ser simétrica, pues no lo es el polinomio. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 2(-x)} = \sqrt{x^2 - 2x}$$

Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

- 3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

- 4) **Continuidad:** Al ser una raíz cuyo dominio no es todo \mathbb{R} tendremos que distinguir dos casos. En primer lugar la función podemos asegurar que es continua en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ por ser composición de funciones continuas.

Habrà que estudiar la continuidad en los puntos -2 y 0 . En estos puntos presenta discontinuidades de segunda especie, pues no existe uno de los límites laterales, pero es facil comprobar que es continua por la izquierda en $x = -2$ y continua por la derecha en $x = 0$.

- 5) **Corte con los ejes:**

Eje X \longrightarrow Hacemos $y = 0$.

$$\sqrt{x^2 + 2x} = 0 \implies x^2 + 2x = 0 \implies x = 0 ; x = -2$$

Luego corta al Eje X en $(-2, 0) ; (0, 0)$.

Eje Y \longrightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raíz positiva, luego la función es positiva en todo su dominio.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

■ A. Verticales:

En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.

■ A. Horizontales:

Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$$

Luego no tiene.

■ A. Oblicuas:

Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1$$

Por tanto, cuando $x \rightarrow +\infty$, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \rightarrow -\infty$ tenemos:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1$$

Por tanto, cuando $x \rightarrow -\infty$, la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua.

b) **ESTUDIO DE f' :**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raíces del numerador:

$$x + 1 = 0 \implies x = -1$$

- Raíces del denominador:

$$\sqrt{x^2 + 2x} = 0 \implies x = -2 ; x = 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$	-	No existe	+

Cuadro 12: Estudio del signo de la derivada de f

- 1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 12 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, -2)$.
- 2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 12 vemos que no hay máximos ni mínimos, pues además el único valor que anula la derivada, $x = 1$, no es del dominio.

c) **ESTUDIO DE f'' :**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}}{x^2 + 2x} = \frac{x^2 + 2x - (x + 1)^2}{(x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x}} = \\
 &= \frac{x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{-1}{(x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x}}
 \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

De Observar el cuadro 13 deducimos que la función es convexa en su dominio y que no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{-1}{(x^2 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x}}$	-	No existe	-

Cuadro 13: Estudio del signo de la derivada segunda de f

RESUMEN

Dominio $\rightarrow (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: $\rightarrow (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Continua por la izquierda en $x = -2$
y por la derecha en $x = 0$.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (-2, 0) ; (0, 0)$.

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: No tiene.

A.O.: $\begin{cases} y = x + 1 & \text{cuando } x \rightarrow +\infty \\ y = -x - 1 & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

Crecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, -2)$

Máximos y mínimos: Son:

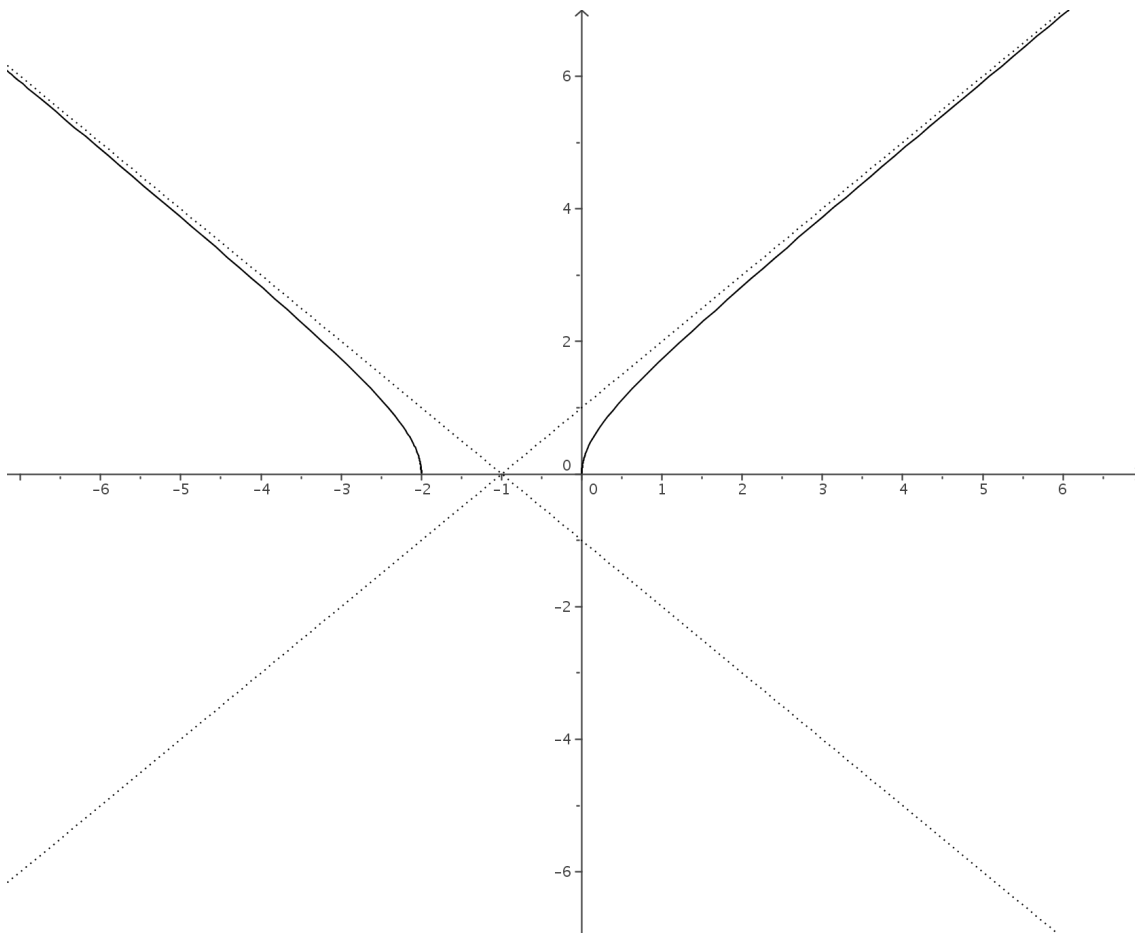
Máximo No tiene.

Mínimo No tiene.

Cóncava No es.

Convexa $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



6. $y = e^{-x^2}$

a) **ESTUDIO DE f :**

- 1) **Dominio:** Teniendo en cuenta el comportamiento de la función exponencial y que esta no se anula nunca, podemos afirmar que el dominio es todo \mathbb{R} .

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

- 2) **Simetría:** Como el polinomio es par, la función va a serlo. Vamos a comprobarlo:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

- 3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

- 4) **Continuidad:** La función es continua por ser composición de funciones continuas.

- 5) **Corte con los ejes:**

Eje X \longrightarrow Hacemos $y = 0$.

$$e^{-x^2} = 0$$

Esta ecuación no tiene solución, pues la exponencial no se anula nunca. Luego no corta al Eje X.

Eje Y \longrightarrow Hacemos $x = 0$.

$$y = e^{-0} = 1$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 1)$

- 6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de una exponencial, luego la función es positiva en todo su dominio.

- 7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.

- A. Horizontales:

Veamos si las tiene.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(-x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:

Como tiene asíntotas horizontales no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f' :**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

Veamos donde se anula $-2xe^{-x^2} = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, -2)$	$(0, +\infty)$
$-2xe^{-x^2}$	+	-

Cuadro 14: Estudio del signo de la derivada de f

- 1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 14 podemos afirmar que la función decrece en el intervalo $(0, +\infty)$ y crece en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- 2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 14 vemos que la función pasa de crecer a decrecer en $x = 0$ y como pertenece al dominio hay en él un máximo.

La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

$$\mathbf{x=0} \longrightarrow y = e^{-0} = 1$$

c) **ESTUDIO DE f'' :**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

Vamos a hallar los valores en los que se hace cero:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \implies 4x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De Observar el cuadro 15 deducimos que la función es cóncava $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ y es convexa en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$(4x^2 - 2)e^{-x^2}$	+	-	+

Cuadro 15: Estudio del signo de la derivada segunda de f

La función tiene dos puntos de inflexión que están en los puntos con coordenadas $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 Como siempre sustituimos en la función para hallar la segunda coordenada:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

RESUMEN

Dominio \mathbb{R}

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X \rightarrow No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, 1)$

Regiones: Son:

$+$ $\rightarrow \mathbb{R}$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: $y = 0$.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, 0)$

Decrecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Máximos y mínimos: Son:

Máximo $(0, 1)$.

Mínimo No tiene.

Cóncava $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Convexa $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

P. Inflexión: $\rightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}); (\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$

