

## CONTROLE 3 : COORDONNEES

**SOYEZ PRECIS ET RIGOUREUX DANS LA REDACTION DE VOS JUSTIFICATIONS.**

**DANS TOUS LES EXERCICES LE REPERE (O ; I ; J) EST ORTHONORME.**

### **EXERCICE 1 :**

Comme le repère est orthonormé on peut appliquer la formule :

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12}$$

$$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(-\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

On remarque tout de suite que le triangle n'est pas isocèle. Est-il rectangle en N ?

$$PN^2 = 16$$

$$MP^2 = 4$$

$$MN^2 = 12$$

Donc  $MN^2 + MP^2 = 12 + 4 = 16 = NP^2$  : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle MNP est rectangle en M.

### **EXERCICE 2 :**

1)

2) ce quadrilatère ressemble fortement à un rectangle. Montrons d'abord que c'est un parallélogramme puis que c'est un rectangle.

Montrons que les diagonales ont le même milieu (on pourrait aussi montrer que les côtés opposés ont même longueur)

Soit I le milieu de AC :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Soit J le milieu de BD :

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Donc  $I=J$  : ABCD est un parallélogramme.

Montrons que les diagonales ont la même longueur (car pour être un rectangle, un parallélogramme doit avoir les diagonales de même longueur)

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7 + 3)^2 + (-2 + 4)^2} = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-8 - 2)^2} = \sqrt{4 + 100} = \sqrt{104}$$

Donc  $AC=BD$  : les diagonales ont la même longueur.

Donc ABCD est un rectangle.

3) comme ABCD est un rectangle, le centre de son cercle circonscrit est le point d'intersection des diagonales et le rayon R est la longueur de la moitié d'une diagonale.

$$\text{Or } AC = \sqrt{104} \text{ donc } R = \frac{\sqrt{104}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 26}}{2} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26}$$

**EXERCICE 3 :** Les points A, B et M ont respectivement comme coordonnées :

$(-3 ; 0)$ ,  $(5 ; 2)$  et  $(2 ; -3)$ .

1)

2) comparons AM et BM.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (0 + 3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Donc  $AM=BM$  : donc M est sur la médiatrice de  $[AB]$

3) (AB) est une droite, donc son équation est de la forme :  $y=mx+p$ .

$$\text{Calcul du coefficient directeur : } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{4}x + p$$

Calcul de p : A appartient à (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB)

$$\text{Donc } y_A = \frac{1}{4}x_A + p \text{ c'est à dire : } 0 = \frac{1}{4} \times (-3) + p \text{ donc } p = \frac{3}{4}$$

Finalemment : (AB) :  $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

3) aucun calcul : il suffit de comparer les 2 coefficients directeurs.

Celui de (AB) vaut  $\frac{1}{4}$ , celui de l'autre droite vaut aussi  $\frac{1}{4}$  donc les droites sont parallèles.

**EXERCICE 4 :** soit  $C$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 4. Soit  $A$  un point de  $C$  d'abscisse 2. Quelle est l'ordonnée de  $A$  ? Justifier.

Facile ! Faites un dessin et vous verrez que l'ordonnée de  $A$  n'est rien d'autre que le côté  $OB$  du triangle  $OAB$  rectangle en  $B$ .

Je vous laisse faire les détails :  $y_A = \sqrt{12}$  (ou  $y_A = -\sqrt{12}$  si vous avez placé  $A$  dans la partie inférieure du cercle)

**EXERCICE 5 :**

1)

2)  $OACB$  est un rectangle donc  $(BC)$  est parallèle  $(OI)$  et  $BC=OA$ . De même  $(AC)$  est parallèle à  $(OJ)$  et  $OB=AC$ . Donc  $x_C = 3$  et  $y_C = 2$ .

$D$  est le milieu de  $[AB]$

Donc  $x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Et  $y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{2} = 1$  finalemment,  $D(1,5 ; 1)$ .

3) montrons que les droites  $(KL)$  et  $(LM)$  (par exemple) ont le même coefficient directeur. Comme elles ont un point commun, elles seront confondues et donc les 3 points seront alignés. Il faut donc trouver les coordonnées des points  $K, L$  et  $M$ , qui sont les intersections respectives des droites  $(DB')$  et  $(BC)$ ,  $(DA')$  et  $(AC)$  et  $(AB)$  et  $(A'B')$ . C'est parti... (c'est assez fastidieux. Si vous n'aviez pas le temps, vous pouvez lire les équations de ces droites graphiquement et ensuite calculer les coordonnées des points d'intersection, vous auriez eu une partie des points. C'est une stratégie à retenir pour un examen ou un concours.)

équation de  $(DB')$  : elle est de la forme  $y=mx+p$

$$m = \frac{8-1}{0-1,5} = -\frac{14}{3}$$

et  $p=8$  donc :

$(DB') : y = -\frac{14}{3}x + 8$

équation de (BC):  $y=2$  (c'est une droite parallèle à (OI) )

donc K a pour ordonnée 2 et pour abscisse :  $2 = -\frac{14}{3}x_K + 8$  c'est-à-dire :

$$x_K = \frac{9}{7}$$

donc  $K(\frac{9}{7}; 2)$ .

Equation de (DA') : elle est de la forme  $y=mx+p$

$$m = \frac{0-1}{6-1,5} = -\frac{2}{9} \quad \text{et} \quad p = \frac{4}{3} \quad \text{donc (DA')} : y = -\frac{2}{9}x + \frac{4}{3}$$

équation de (AC) : elle est parallèle à (OJ) donc (AC) :  $x=3$

donc L a pour coordonnées :  $x=3$  et

$$y = -\frac{2}{9} \times 3 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

donc  $L(3; \frac{2}{3})$

équation de (AB) : elle est de la forme  $y=mx+p$

$$m = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

$$p=2 \quad \text{donc} \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

équation de (A'B') : elle est de la forme  $y=mx+p$

$$m = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \quad \text{et}$$

$$p=8$$

$$\text{donc} \quad y = -\frac{4}{3}x + 8$$

il faut résoudre le système :  $y = -\frac{2}{3}x + 2$  et  $y = -\frac{4}{3}x + 8$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad -\frac{4}{3}x + 8 = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad -\frac{2}{3}x = -6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

$$x = 9 \quad \text{et} \quad y = -4$$

donc M(9 ; -4)

Enfin :

Le coefficient directeur de (KL) est :

$$m = \frac{\frac{2}{3} - 2}{3 - \frac{9}{7}} = -\frac{7}{9}$$

Le coefficient directeur de (LM) est :

$$m = \frac{-4 - \frac{2}{3}}{9 - 3} = -\frac{7}{9}$$

Les coefficients directeurs sont les mêmes, donc les points K, L et M sont alignés. (ouf, enfin fini...)

**EXERCICE 6 :** l'algorithme permet de vérifier si un triangle est isocèle, puisqu'il calcule puis compare les 3 longueurs des côtés.